

## 5. Goniometrie a trigonometrie

### 1. Načrtni grafy goniometrických funkcí

$$a) y = -2 \sin x$$

$$b) y = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$c) y = \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$d) y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$e) y = \frac{\pi}{3} - \cot gx$$

$$f) y = -\frac{1}{2} \cot g 2x$$

$$g) y = |1 - 2 \cos x|$$

$$h) y = \left| \cos x \right| - 0,5$$

$$i) y = \sin|x|$$

$$j) y = \left| \cot gx + \frac{\pi}{3} \right|$$

$$k) y = \sin x + |\sin x|$$

$$l) y = y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$$

### 2. Určete definiční obor daného výrazu a potom ho zjednodušte

$$a) \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x} =$$

$$b) \frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} =$$

$$c) \frac{\cos 2x + \sin^2 x}{1 + \cos 2x} =$$

$$d) \frac{2 \sin x + \sin 2x}{2 \sin x - \sin 2x} =$$

$$e) \frac{2 \cos x - \cos 2x - 1}{2 \cos x + \cos 2x} =$$

### 3. Dokažte, že platí (bez podmínek):

$$a) \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x + \cos x}{\cos x}$$

$$b) 1 - 2 \sin^2 x = \frac{\cot g^2 x - 1}{\cot g^2 x + 1}$$

$$c) \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

$$d) \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$$

$$e) \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} + \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \operatorname{tg} x$$

$$f) \sin x - \sin(x + 60^\circ) + \sin(x + 120^\circ) = 0$$

$$g) 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x$$

$$h) 1 + \sin x = \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2$$

$$i) \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} = \operatorname{tg} x$$

$$k) \frac{\sin x}{\sin y} + \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{2 \sin(x + y)}{\sin 2y}$$

#### 4. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$

a)  $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

b)  $\operatorname{tg}^2 x + 3 \cot g^2 x - 4 = 0$

c)  $2 \sin^2 5x + 3 \cos 5x = 0$

d)  $\sin x + \sin 2x = 0$

e)  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$

f)  $\cos 2x + \sin x \cos x = 1$

g)  $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos^2 2x$

h)  $\cos 2x - \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$

i)  $1 - \cos 2x = \sin 2x \cdot \sin x$

k)  $\frac{1}{\cos^2 2x} - 2 \operatorname{tg} 2x = 0$

l)  $\sin \frac{x}{2} + \cos x = 1$

m)  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 5 \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

n)  $2 \sin x - \cos x + 1 = 0$

o)  $\cos x + 3 \sin x + 3 = 0$

p)  $\cot gx - 1 = \frac{4 \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x}$

q)  $\frac{1}{\sin x} = \sin x + \cos x$

#### 5. Goniometrické nerovnice

a)  $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $0 \leq \cos x < \frac{1}{2}$

c)  $\sin 2x \leq \frac{1}{2}$

d)  $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

e)  $\cos x < \sin x$

f)  $\operatorname{tg} x \geq \cot gx$

#### 6. Trigonometrie

- Určete délky všech stran a všech úhlů v trojúhelníku  $ABC$ , je-li:  $a = 7 \text{ cm}$ ,  $c = 12 \text{ cm}$ ,  $\beta = 124^\circ$ .
- Vypočítejte velikost nejmenšího úhlu v Trojúhelníku  $ABC$ , znáte-li délky stran 7,8,9 cm.
- Určete délky všech stran a všech úhlů v trojúhelníku  $ABC$ , je-li:  $b = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 110^\circ$ ,  $\beta = 28^\circ$ .
- Určete délky všech stran a všech úhlů v trojúhelníku  $ABC$ , je-li:  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$ ,  $\beta = 30^\circ$ .
- V trojúhelníku  $ABC$  znáte poměr délek stran  $a:b:c = 2:4:5$ . Vypočítejte velikosti úhlů tohoto trojúhelníku.
- V trojúhelníku  $ABC$  znáte:  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $v_a = 2 \text{ cm}$ . Vypočítejte obsah trojúhelníku  $ABC$  a výšky  $v_b$ .
- V trojúhelníku  $ABC$  znáte:  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$ . Vypočítejte obsah trojúhelníku  $ABC$  a výšky  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $v_c$ .
- Vypočítejte poloměr kružnice trojúhelníku  $ABC$  opsané i poloměr kružnice vepsané, znáte-li:  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $c = 6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ .
- Vypočítejte délku strany  $a$ , obvod  $o$  a obsah  $S$  pravidelného pětiúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru  $r = 6 \text{ cm}$ .
- Užitím kosinové věty dokažte, že všechny úhly v rovnostranném trojúhelníku mají velikost  $60^\circ$ .

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Výsledky:**

2. a)  $1; x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\}$  b)  $\frac{2}{\cos x}; x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  c)  $\frac{1}{2}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  d)  $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}; x \neq k\pi$   
e)  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  3. Všechny rovnosti platí...

4.

a)  $\left\{ \frac{2}{3}k\pi \right\}$  b)  $\left\{ \frac{1}{3}\pi + k\pi; \frac{2}{3}\pi + k\pi; \frac{1}{4}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$  c)  $\left\{ \frac{2}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi; \frac{4}{15}\pi + \frac{2}{5}k\pi \right\}$   
d)  $\left\{ k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}$  e)  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$  f)  $\{k\pi; \arctg 0,5 + k\pi\}$   
g)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  h)  $\{k\pi; -\arctg 2 + k\pi\}$  i)  $\{k\pi\}$  k)  $\left\{ \frac{1}{8}\pi + k\frac{\pi}{2} \right\}$   
l)  $\left\{ 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 4k\pi; \frac{5}{3}\pi + 4k\pi \right\}$  m)  $\left\{ \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\}$  n)  $\{2k\pi; \pi + \arcsin 0,8 + 2k\pi\}$   
o)  $\left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \pi + \arcsin 0,8 + 2k\pi \right\}$  p)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{5}{12}\pi + k\pi \right\}$  q)  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

5.

a)  $\bigcup \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \right\rangle$  b)  $\bigcup \left\{ \left\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; \frac{5}{3}\pi + 2k\pi \right\rangle \right\}$   
c)  $\bigcup \left\langle \frac{5}{12}\pi + k\pi; \frac{13}{12}\pi + k\pi \right\rangle$  d)  $\bigcup \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3}{4}\pi + k\pi \right\rangle$  e)  $\bigcup \left( \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; \frac{7}{4}\pi + 2k\pi \right)$   
f)  $\bigcup \left\{ \left\langle \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}\pi + k\pi; \pi + k\pi \right\rangle \right\}$

6.

a)  $b = 16,9 \text{ cm}, \alpha = 20^\circ 06', \gamma = 36^\circ 04'$  b)  $\alpha = 78^\circ 11'$  c)  $a = 10 \text{ cm}, c = 7,1 \text{ cm}, \gamma = 42^\circ$   
d)  $c = 5,2 \text{ cm}, \alpha = 90^\circ, \gamma = 60^\circ$  e)  $\alpha = 22^\circ 20', \beta = 49^\circ 27', \gamma = 108^\circ 13'$  f)  $S = 5 \text{ cm}^2, v_b = 2,5 \text{ cm}$   
g)  $S = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2, v_a = 3\sqrt{3} \text{ cm}, v_b = 2\sqrt{3} \text{ cm}, v_c = \frac{6}{7}\sqrt{21} \text{ cm}$  h)  $r = 3 \text{ cm}, \rho = 1,2 \text{ cm}$   
i)  $a = 8,7 \text{ cm}, o = 43,6 \text{ cm}, S = 130,8 \text{ cm}^2$